

Lecția 2: Trigonometrie în Măsurători Terestre

Obiective: Elevii vor aplica teoremele sinusurilor și cosinusurilor în rezolvarea problemelor practice de topografie, vor calcula elemente inaccesibile și vor înțelege metoda triangulației.

I. PARTEA TEORETICĂ

1. De ce este Necesară Trigonometria în Topografie?

În practica topografică, nu putem măsura întotdeauna direct toate elementele unui teren. Există obstacole naturale:

- Râuri, lacuri
- Clădiri
- Zone mlăștinoase
- Terenuri cu pante abrupte

Soluția: Folosim triangulația - metodă care transformă problema măsurării directe într-o problemă de calcul trigonometric.

2. Triangulația – Conceptul de Bază

Definiție: Triangulația este o metodă de determinare a poziției punctelor prin formarea de triunghiuri succesive, pornind de la o bază cunoscută.

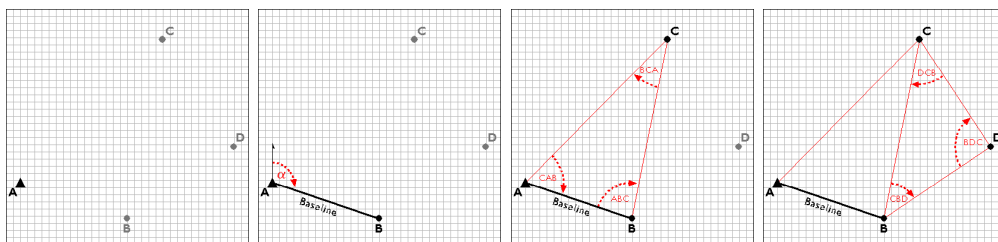


Figura 1: Rețea de triangulație - fiecare triunghi pornește de la o latură cunoscută.

Cum funcționează:

- Se măsoară o bază AB (accesibilă și precis măsurabilă)
- Din punctele A și B se măsoară unghiurile către punctul C (inaccesibil)
- Se calculează distanțele AC și BC folosind trigonometria
- Punctul C devine cunoscut și poate fi folosit ca punct de plecare pentru noi triunghiuri

3. Teorema Sinusurilor – Pentru Situația AAS sau SSA

Enunț: Într-un triunghi oarecare, raportul dintre lungimea unei laturi și sinusul unghiului opus este constant și egal cu diametrul cercului circumscris.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$$

unde R este raza cercului circumscris.

Când folosim? Când cunoaștem:

- AAS (Unghi-Unghi-Latură): Două unghiuri și o latură neadiacentă
- ASA (Unghi-Latură-Unghi): Două unghiuri și latura dintre ele
- SSA (Latură-Latură-Unghi): Două laturi și un unghi opus uneia dintre ele (caz ambiguu!)

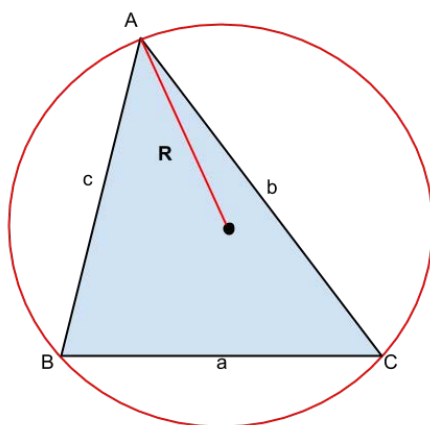


Figura 2: Triunghi oarecare cu notațiile pentru teorema sinusurilor.

Exemplu practic de aplicare AAS: Să presupunem că vrem să măsurăm distanța până la un copac (C) de pe malul opus al unui râu. Pe malul accesibil, măsurăm o bază $AB = 50$ m. Din A măsurăm unghiul $BAC = 65^\circ$. Din B măsurăm unghiul $ABC = 70^\circ$. Putem calcula AC și BC fără să traversăm râul!

4. Teorema Cosinusurilor – Pentru Situația SAS sau SSS

Enunț: Într-un triunghi oarecare, pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul acestor laturi și cosinusul unghiului dintre ele.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

Când folosim? Când cunoaștem:

- SAS (Latură-Unghi-Latură): Două laturi și unghiul dintre ele
- SSS (Latură-Latură-Latură): Toate cele trei laturi (pentru a calcula unghiurile)

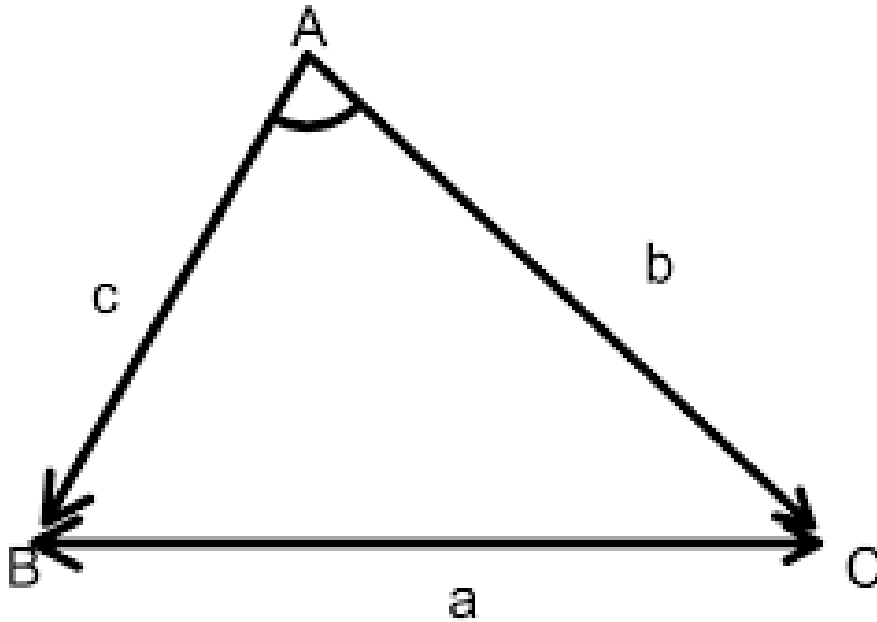


Figura 3: Ilustrație geometrică pentru teorema cosinusurilor.

Exemplu practic de aplicare SAS: Un topograf măsoară laturile $AB = 120$ m și $AC = 90$ m ale unui teren triunghiular și unghiul dintre ele $A = 55^\circ$. Poate calcula direct latura BC fără a măsura unghiurile B și C .

5. Comparație între Cele Două Teoreme

Situație	Teorema recomandată	Motiv
Se cunosc 2 unghiuri și o latură	Sinusurilor	Permite calculul celorlalte laturi direct
Se cunosc 2 laturi și unghiul dintre ele	Cosinusurilor	Dă latura opusă unghiului cunoscut
Se cunosc toate cele 3 laturi	Cosinusurilor	Permite calculul oricărui unghi
Se cunosc 2 laturi și un unghi opus	Sinusurilor	Dar atenție la cazul ambiguu!

Cazul ambiguu SSA: Când cunoaștem două laturi și un unghi opus uneia dintre ele, pot exista 0, 1 sau 2 triunghiuri posibile! Acesta este motivul pentru care în măsurători topografice se evită această situație.

II. EXEMPLU REZOLVAT COMPLET

Problema Topografică Reală: Pentru a determina distanța până la un punct inaccesibil C (un turn pe un deal), topografii au instalat stații în punctele accesibile A și B. Au măsurat:

- Baza $AB = 85.0$ metri (precizie 1 cm)
- Unghiul $BAC = 58^\circ 20'$
- Unghiul $ABC = 72^\circ 45'$

Cerințe:

- Calculează unghiul ACB
- Calculează distanțele AC și BC
- Calculează suprafața triunghiului ABC
- Dacă azimutul AB este 40° , determină azimutul AC

REZOLVARE DETALIATĂ:

Pasul 1: Calculul unghiului ACB

Suma unghiurilor într-un triunghi = 180° :

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC)$$

Convertim în grade zecimale:

$$58^\circ 20' = 58 + \frac{20}{60} = 58.3333^\circ \quad 72^\circ 45' = 72 + \frac{45}{60} = 72.75^\circ$$

Suma:

$$58.3333 + 72.75 = 131.0833^\circ$$

$$\angle ACB = 180 - 131.0833 = 48.9167^\circ = 48^\circ 55'$$

Pasul 2: Calculul distanțelor AC și BC cu Teorema Sinusurilor

$$\frac{AC}{\sin(\angle ABC)} = \frac{AB}{\sin(\angle ACB)} \Rightarrow AC = AB \cdot \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)}$$

$$AC = 85.0 \cdot \frac{\sin(72.75^\circ)}{\sin(48.9167^\circ)}$$

$$\sin(72.75^\circ) \approx 0.9551, \quad \sin(48.9167^\circ) \approx 0.7547$$

$$AC \approx 85.0 \cdot 1.2655 \approx 107.57 \text{ m}$$

Similar:

$$\frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AB}{\sin(\angle ACB)} \Rightarrow BC = AB \cdot \frac{\sin(\angle BAC)}{\sin(\angle ACB)}$$

$$BC = 85.0 \cdot \frac{\sin(58.3333^\circ)}{\sin(48.9167^\circ)}$$

$$\sin(58.3333^\circ) \approx 0.8516 \Rightarrow BC \approx 85.0 \cdot 1.1284 \approx 95.91 \text{ m}$$

Pasul 3: Calculul suprafeței triunghiului ABC

Folosim formula ariei cu două laturi și sinusul unghiului dintre ele:

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 85.0 \cdot 107.57 \cdot \sin(58.3333^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 85.0 \cdot 107.57 \cdot 0.8516 \approx 3893.43 \text{ m}^2$$

Pasul 4: Determinarea azimutului AC

Azimutul AB = 40° (dat)

Unghiul BAC = $58^\circ 20' = 58.3333^\circ$ (măsurat)

Azimutul AC se obține rotind direcția AB cu unghiul BAC în sens trigonometric (invers acelor de ceasornic):

$$Az_{AC} = Az_{AB} - \angle BAC$$

$$Az_{AC} = 40^\circ - 58.3333^\circ = -18.3333^\circ$$

Unghi negativ $\Rightarrow$ adăugăm 360° :

$$Az_{AC} = 360^\circ - 18.3333^\circ = 341.6667^\circ = 341^\circ 40'$$

Răspuns final:

- $\angle ACB = 48^\circ 55'$
- $AC \approx 107.57 \text{ m}$, $BC \approx 95.91 \text{ m}$
- Suprafața $\approx 3893 \text{ m}^2$
- $Az_{AC} \approx 341^\circ 40'$

III. SET DE 10 EXERCIIȚII PENTRU LECȚIE (cu rezolvări complete)

Exercițiul 1 (AAS)

Enunț: Într-un triunghi teren, se cunosc $b = 80 \text{ m}$, $A = 40^\circ$, $B = 75^\circ$. Găsește latura a .

Rezolvare:

$$C = 180^\circ - (40^\circ + 75^\circ) = 65^\circ$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin(A)}{\sin(B)}$$

$$a = 80 \cdot \frac{\sin(40^\circ)}{\sin(75^\circ)} \approx 80 \cdot \frac{0.6428}{0.9659} \approx 53.23 \text{ m}$$

Explicație: Am aplicat teorema sinusurilor pentru situația AAS.

Exercițiul 2 (ASA)

Enunț: Două puncte A și B sunt separate de un lac. Din A și C (punct auxiliar pe malul accesibil), se măsoară: $AC = 110$ m, $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 65^\circ$. Găsește AB.

Rezolvare:

$$B = 180^\circ - (50^\circ + 65^\circ) = 65^\circ$$

Triunghiul are $A = 50^\circ$, $B = 65^\circ$, $C = 65^\circ$ (isoscel).

$$\frac{AB}{\sin(C)} = \frac{AC}{\sin(B)} \Rightarrow AB = AC \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(B)}$$

$$\sin(65^\circ) \approx 0.9063 \Rightarrow AB = 110 \cdot \frac{0.9063}{0.9063} = 110 \text{ m}$$

Explicație: Triunghiul este isoscel cu $AC = AB = 110$ m.

Exercițiul 3 (SAS cu cosinusuri)

Enunț: Un triunghi teren are laturile $a = 65$ m, $b = 80$ m, și unghiul C dintre ele $= 45^\circ$. Găsește lungimea laturii c .

Rezolvare:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

$$c^2 = 65^2 + 80^2 - 2 \cdot 65 \cdot 80 \cos 45^\circ$$

$$c^2 = 4225 + 6400 - 10400 \cdot 0.7071$$

$$c^2 = 10625 - 7353.84 = 3271.16 \Rightarrow c = \sqrt{3271.16} \approx 57.19 \text{ m}$$

Explicație: Situație SAS perfectă pentru teorema cosinusurilor.

Exercițiul 4 (SSS pentru unghi)

Enunț: Calculează cel mai mare unghi al unui teren triunghiular cu laturile 25 m, 30 m și 35 m.

Rezolvare: Cel mai mare unghi este opus laturii celei mai mari (35 m). Notăm $a = 35$, $b = 30$, $c = 25$.

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos(A) = \frac{30^2 + 25^2 - 35^2}{2 \cdot 30 \cdot 25} = \frac{900 + 625 - 1225}{1500} = \frac{300}{1500} = 0.2$$

$$A = \arccos(0.2) \approx 78.46^\circ = 78^\circ 28'$$

Explicație: Cosinusurilor pentru unghiuri când cunoaștem toate laturile.

Exercițiul 5 (Înălțime indirectă)

Enunț: Un stâlp de înălțime necunoscută aruncă o umbră de 18 m când unghiul de elevație al soarelui este de 35° . Calculează înălțimea stâlpului.

Rezolvare:

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{18} \Rightarrow h = 18 \tan 35^\circ$$

$$\tan 35^\circ \approx 0.7002 \Rightarrow h \approx 18 \cdot 0.7002 \approx 12.60 \text{ m}$$

Explicație: Trigonometria în triunghi dreptunghic.

Exercițiul 6 (Acoperiș triunghiular)

Enunț: Un acoperiș are forma unui triunghi isoscel cu baza 12 m și unghiurile de la bază de 70° . Care este lungimea căpriorului (latura egală)?

Rezolvare: Înălțimea împarte baza în două: $12/2 = 6 \text{ m}$.

$$\cos 70^\circ = \frac{6}{\text{căprior}} \Rightarrow \text{căprior} = \frac{6}{\cos 70^\circ}$$

$$\cos 70^\circ \approx 0.3420 \Rightarrow \text{căprior} \approx \frac{6}{0.3420} \approx 17.54 \text{ m}$$

Explicație: Aplicație practică în construcții.

Exercițiul 7 (Lățime râu)

Enunț: Pentru a măsura lățimea unui râu (AB), de la un copac pe malul opus (B), se măsoară pe malul accesibil un segment $AC = 60 \text{ m}$. Unghiul $BAC = 40^\circ$, $BCA = 105^\circ$. Găsește lățimea AB.

Rezolvare:

$$B = 180^\circ - (40^\circ + 105^\circ) = 35^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = AC \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$$

$$AB = 60 \cdot \frac{\sin 105^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\sin 105^\circ \approx 0.9659, \quad \sin 35^\circ \approx 0.5736 \Rightarrow AB \approx 60 \cdot 1.6840 \approx 101.04 \text{ m}$$

Explicație: Măsurare indirectă clasică.

Exercițiul 8 (Patrulater divizibil)

Enunț: Un teren este un patrulater convex. Împarte-l în două triunghiuri și explică ce date ai nevoie pentru a-i calcula suprafața totală.

Rezolvare: Metoda:

- 1) Alegem o diagonală (AC) care împarte patrulaterul în triunghiuri ABC și ACD

2) Pentru triunghiul ABC, avem nevoie de:

- Varianta 1: 2 laturi și unghiul dintre ele (AB, BC, $\angle B$)
- Varianta 2: o latură și înălțimea corespunzătoare
- Varianta 3: toate cele 3 laturi (folosind formula lui Heron)

3) Similar pentru triunghiul ACD

4) Aria totală = Aria(ABC) + Aria(ACD)

Explicație: Orice poligon convex se poate împărți în triunghiuri.

Exercițiul 9 (Pantă drum)

Enunț: Unghiul de pantă al unui drum este de 12° . Dacă se parcurg 250 m pe drum, cu cât se crește în altitudine?

Rezolvare:

$$\sin 12^\circ = \frac{h}{250} \Rightarrow h = 250 \sin 12^\circ$$

$$\sin 12^\circ \approx 0.2079 \Rightarrow h \approx 250 \cdot 0.2079 \approx 51.98 \text{ m}$$

Explicație: Diferența de nivel în proiectarea drumurilor.

Exercițiul 10 (Verificare triunghi)

Enunț: Verifică dacă există un triunghi teren cu laturile 8 m, 10 m și 20 m.

Rezolvare: Inegalitatea triunghiului:

$$8 + 10 = 18 < 20$$

CONCLUZIE: Nu există un astfel de triunghi.

IV. SET DE 10 EXERCITII PENTRU ACASĂ (TEMA)

Instrucțiuni: Rezolvați următoarele probleme, prezentând toate calculele.

1. Triangulație simplă: Într-un triunghi teren, se cunosc: $a = 45 \text{ m}$, $B = 55^\circ$, $C = 70^\circ$. Calculează unghiul A și laturile b și c .
2. Distanță inaccesibilă: Pentru a afla distanța de la punctul A la punctul inaccesibil D, s-au făcut măsurători în triunghiul ABD: $AB = 75 \text{ m}$, $\angle A = 62^\circ$, $\angle B = 48^\circ$. Calculează AD.
3. Teritoriu triunghiular: Un teren triunghiular are laturile de 85 m și 95 m care formează un unghi de 115° . Calculează:
 - a) A treia latură

b) Suprafața terenului

4. Verificare unghiuri: Un triunghi are laturile de 28 m, 45 m și 50 m. Calculează toate unghiurile sale.
5. Înălțime turn: Pentru a măsura înălțimea unui turn, se măsoară din două puncte A și B (cu $AB = 40$ m) unghiurile de elevație: din A = 35° , din B = 42° . Calculează înălțimea turnului.
6. Suprafața patrulaterului: Un patrulater ABCD are diagonala $AC = 60$ m. În triunghiul ABC: $AB = 35$ m, $BC = 45$ m, $\angle B = 80^\circ$. În triunghiul ADC: $AD = 40$ m, $DC = 50$ m, $\angle D = 100^\circ$. Calculează suprafața totală.
7. Caz ambiguu SSA: Pentru un triunghi cu $a = 15$ m, $b = 20$ m, $A = 30^\circ$, determină câte triunghiuri sunt posibile și calculează unghiul B în fiecare caz.
8. Azimut și distanță: Din punctul P, azimutul către Q este 85° și distanța $PQ = 120$ m. Din Q, azimutul către R este 210° și distanța $QR = 90$ m. Calculează distanța PR și azimutul de la P la R.
9. Teritoriu neregulat: Un teren pentagonal este împărțit în 3 triunghiuri. Ariile triunghiurilor sunt: 450 m^2 , 380 m^2 și 520 m^2 . Care este suprafața totală a terenului?
10. Problema de terasament: Un teren trapezoidal are baza mare de 80 m, baza mică de 50 m și unghiurile de la baza mare de 65° . Calculează înălțimea trapezului și suprafața sa.

V. REZOLVĂRI SCHEMATICE PENTRU TEMA

1. $\angle A = 55^\circ$, $b \approx 45 \cdot \frac{\sin 55^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 39.2$ m, $c \approx 45 \cdot \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} = 45$ m
2. $\angle D = 70^\circ$, $AD = 75 \cdot \frac{\sin 48^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 59.3$ m
3. a) $c^2 = 85^2 + 95^2 - 2 \cdot 85 \cdot 95 \cos 115^\circ \Rightarrow c \approx 149.2$ m
b) $A = \frac{1}{2} \cdot 85 \cdot 95 \sin 115^\circ \approx 3658.5 \text{ m}^2$
4. $\cos A = \frac{45^2 + 50^2 - 28^2}{2 \cdot 45 \cdot 50} \approx 0.8529 \Rightarrow A \approx 31.5^\circ$; similar $B \approx 85.2^\circ$, $C \approx 63.3^\circ$
5. Fie h înălțimea, x distanța de la A la proiecție. Sistem: $\frac{h}{x} = \tan 35^\circ$, $\frac{h}{x+40} = \tan 42^\circ \Rightarrow h \approx 52.7$ m
6. $A_{tot} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 45 \sin 80^\circ + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \sin 100^\circ \approx 773.6 + 984.8 = 1758.4 \text{ m}^2$
7. $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{20 \cdot 0.5}{15} = 0.6667 \Rightarrow B_1 \approx 41.8^\circ$, $B_2 \approx 138.2^\circ$ (2 soluții)
8. Teorema cosinusurilor în $\triangle PQR$: $PR^2 = 120^2 + 90^2 - 2 \cdot 120 \cdot 90 \cos 125^\circ \Rightarrow PR \approx 183.5$ m
9. $A_{tot} = 450 + 380 + 520 = 1350 \text{ m}^2$
10. $h = \frac{80-50}{2 \tan 65^\circ} \approx 6.99$ m; $A = \frac{80+50}{2} \cdot h \approx 454.4 \text{ m}^2$